Domácí úkol ze cvičení 11.

Derivace složené funkce více proměnných

1. Derivace složené funkce více proměnných: „technika derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového" pravidla - jaké to jsou předpoklady?
(Pokuste se aspoň dva příklady „sepsat" a zjistit, co „nejde"- případné nejasnosti probereme na cvičení.)
   a) Je-li $g(t) = f(\sin t, t^2)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$.
   b) Určete $g'(x)$ a $g''(x)$, je-li $g(x) = F(x, \varphi(x))$.
   c) Určete parciální derivace 1.a 2. řádu funkce g , je-li
      (i) $g(x,y) = f(x^2 y, \frac{x}{y})$; (ii) $g(x,y) = f(x^2 + y^2, xy, \frac{y}{x})$; (iii) $g(x,y,z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$.
   d) Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $g(x,y) = F(x,y,\varphi(x,y))$.

2*. Transformujte diferenciální operátor $x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ do polárních souřadnic
($x = r\cos\varphi, x = r\sin\varphi$, $r \in (0,\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi]$).
(úloha pro ty, co by chtěli vyřešit rovnici $x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$)

Extrémy (jednoduché)

1. Dopočítejte si příklady ze cvičení:
Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y)$ na množině M , je-li:
   a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$, $M = \{(x,y);\ x^2 \le y \le 4\}$
   b) $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$, $M = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \le 1\}$

nebo něco z

2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y)$ na množině M , je-li:
   a) $f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$, $M = \{(x,y); x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 6\}$;
   b) $f(x,y) = xy^2$, $M = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \le 1\}$;
   c) $f(x,y) = xy$, $M = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

A příprava na příští cvičení - zkuste, zda byste vyřešili něco z následujícího příkladu (viz poslední přednáška) a promyslete, prosím, případné dotazy :

1. Ukažte, že rovnicí $F(x,y) = 0$ je v okolí bodu (x_0, y_0) definována implicitně funkce $y = f(x)$.
Pak a) vypočítejte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$;
   b) napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y) = 0$ v bodě (x_0, y_0) ;
   c) aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0 pomocí Taylorova polynomu 2.stupně, když:
      i) $F(x,y) = x^2 - y^3 + x^2 y - 1$, $(x_0, y_0) = (1,0)$
      ii) $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 3$, $(x_0, y_0) = (1,2)$
      iii) $F(x,y) = xy - e^x + e^y$, $(x_0, y_0) = (0,0)$

nebo také

2. a) Dokažte, že rovnicí $2x^2 + 2y^2 + z^3 + 8xz - z + 8 = 0$
je definována implicitně v okolí bodu $(-2,0,1)$ funkce $z = f(x,y), f \in C^2(U(-2,0))$.
   b) Ukažte, že bod $(-2,0)$ stacionárním bodem funkce $f(x,y)$.
   c) Nabývá funkce $z = f(x,y)$ v bodě $(-2,0)$ lokální extrém?